

Kvalifikacioni ispit za studijske programe za matematiku i računarstvo i matematiku i fizika

01. 09. 2009.

1. Ustanoviti tačnost jednakosti:

$$\frac{2x^2-2x+1}{x^2-x} + \frac{x}{1-x} = -\frac{1}{x}$$

2. Pokazati da je:

$$\left(\frac{x\sqrt{x-y}\sqrt{y}}{\sqrt{x-y}} + \sqrt{xy}\right)\left(\frac{\sqrt{x-y}}{x-y}\right)^2 = 1.$$

3. Odrediti vrijednost realnog parametra k tako da zbir kvadrata rješenja jednačine $x^2 - (2k + 1)x - 4k - 6 = 0$ bude:

- (a) jednak 29
- (b) jednak -4

4. Ako je $\log_b a = \sqrt{7}$, izračunati $\log_{a\sqrt{b}}\left(\frac{a}{\sqrt{b^3}}\right)$.

5. Naći četiri broja koji formiraju geometrijsku progresiju kod koje je treći član veći od prvog za 9, a drugi veći od četvrtog za 18.

6. Dokazati $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \frac{1}{4} \sin 4x$.

7. Riješiti jednačinu $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$.

8. U trouglu ABC uglovi kod A i C iznose, redom, 15° i 30° . Neka je D presječna tačka prave kroz B normalne na pravu AB i prave AC . Dokazati da je $AD = 2BC$.

9. Omotač pravilne trostrane piramide, čija bočna ivica ima dužinu 1, čine jednakokrako-pravougli trouglovi. Izračunati zapreminu piramide.

10. Odrediti jednačinu kružnice čiji je centar tačka $C(2, 5)$ a dodiruje spolja kružnicu $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$.