УНИВЕРЗИТЕТ У ИСТОЧНОМ САРАЈЕВУ
ФИЛОЗОФСКИ ФАКУЛТЕТ

ПРЕДМЕТ: Функционална анализа
Први колоквијум

Пале, 07.IV 2009

1.Посматрајмо скуп $A=\{ f \in C\left[0,1\right] : \forall t \in \left[0,1\right] \quad \left|\mathrm{f(t)}\right|<1\}$ доказати да је скуп A отворен у $C\left[0,1\right]$.

2. Нека је $F=\left\{ x \in l_2 \left| \left|\varepsilon_v\right| \leq \frac{1}{v} \right. \right\}$ доказати да је F затворен, да ли је компактан?

3.У Банаховом простору $C\left[0,1\right]$ посматрајмо низ $x_n(t)=\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$.

Испитати јаку конвергенција низа.

4.Испитати да ли је скуп . $A=\left\{ \frac{1}{\left(\alpha^2+1\right)t}+t^2 \left| \alpha \in R \right. \right\}$ релативно компактан у простору $C\left[n,m\right]$ гдје су n,m различити природни бројеви.

5. Нека је $\left(X,d\right)$ метрички простор и нека је $0<\alpha \leq 1$. Означимо са $Lip_\alpha\left(X\right)$ скуп свих непрекидних ограничених функција f таквих да постоји константа C таква да је $\left|f(x)-f(y)\right| \leq Cd\left(x,y\right)^\alpha$ за све $x,y \in X$ и дефинишимо $\left\|f\right\|_\alpha=\sup_{x\in X}\left|f(x)\right|+\sup_{x,y\in X,x\neq y}\frac{\left|f(x)-f(y)\right|}{d(x,y)^\alpha}$. Доказати да је на овај начин задана норма на $Lip_\alpha\left(X\right)$ која га претвара у Банахов простор .

Сваки задатак вриједи 20 бод.
Вријеме за израду је 180 мин.